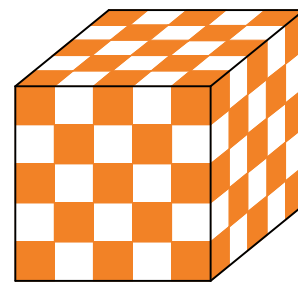




1. Куб зі стороною 5 складається зі 125 білих і помаранчевих одиничних кубиків так, що будь-які два сусідні (по гранях) кубики мають різний колір. Кубики у вершинах помаранчеві. Скільки білих одиничних кубиків використано? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 62 кубики.



2. У кошику 30 яблук, червоних і жовтих. Микита обирає 10 з них, потім Сашко обирає 5 із цих десяти, а потім знову Микита вибирає 2 з цих п'яти.

Якщо обидва виявляться червоними, Микита виграв. При якій найменшій кількості червоних яблук Микита напевно зможе виграти? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання. Зрозуміло, що коли червоних яблук буде 7, то Микита виграв. Дійсно, коли він обирає 10 яблук, то обере 7 червоних і 3 жовтих, Сашку не вдасться забрати більше 5 червоних, отже 2 залишаться. Якщо ж червоних яблук буде 6, то Сашко може залишити лише одне червоне яблуко, і Микита програє.

3. Три їжачки ділили три шматочки сиру масами 5 г, 8 г і 11 г. Лисиця стала їм допомагати. Вона може від будь-яких двох шматочків одночасно відрізати і з'їсти по 1 г сиру. Чи зможе лисиця залишити їжачкам рівні шматочки сиру? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: так, зможе.

Розв'язання. Якщо лисиця тричі від'їсть від шматків у 5 г і 11 г по 1 г сиру, то вийдуть два однакові шматочки по 8 г і один у 2 г. Потім їй залишиться ще 6 разів від'їсти по 1 г від великих шматочків і залишаться три рівні шматочки по 2 г.

4. Серед чотирьох людей немає трьох з однаковим ім'ям, або з однаковим по батькові, або з однаковим прізвищем, але у кожних двох збігається або ім'я, або по батькові, або прізвище. Чи може таке бути? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: так, може, наприклад: Андрій Васильович Іваненко, Андрій Сергійович Петренко, Борис Сергійович Іваненко, Борис Васильович Петренко.

5. Квадрат 3×3 заповнений цифрами так, як показано на рисунку зліва.

Дозволяється, почавши з будь-якого місця, ходити по клітинках цього квадрата, переходячи з клітинки у сусідню (по стороні), але ні в яку клітинку не дозволяється потрапляти двічі. Андрійко пройшов так, як показано на рисунку праворуч, і виписав по порядку всі цифри, що зустрілися по дорозі, — вийшло 84937561. Нарисуйте інший шлях так, щоб вийшло найбільше можливе число.

Відповідь обґрунтуйте.

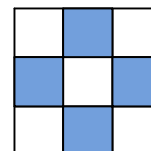
1	8	4
6	3	9
5	7	2

1	8	4
6	3	9
5	7	2

Відповідь:

1	8	4
6	3	9
5	7	2

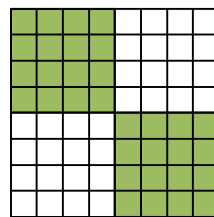
Розв'язання. Якщо обійти всі клітинки дошки, то вийде 9-цифрове число, яке, зрозуміло, більше 8-цифрового. 9-цифрове число тим більше, чим більша його перша цифра. Але 9-цифрового числа, що починається з 9, побудувати не вдасться. Більше того, для жодної з синіх клітин (див. рисунок) не існує шляху, який починається в цій клітинці і проходить по всіх клітинках дошки. Дійсно, хід з синьої клітинки завжди приводить у білу. Всього синіх клітинок чотири, тому білих клітинок на будь-якому такому шляху теж не більше чотирьох — усі п'ять білих клітинок так не оминати. Тому треба почати з найбільшої «білої» цифри — цифри 5, перейти до її найбільшого сусіда, цифри 7, а потім до її найбільшого сусіда, цифри 3. Потім доведеться перейти до клітинки з цифрою 6, інакше обійти всю дошку не вдасться. Далі шлях єдиний. Отже, найбільше число, яке можна отримати — 573618492.





1. Клітинки таблиці 8×8 пофарбовані в зелений і білий кольори, як показано на рисунку. Скільки квадратів, які складаються із чотирьох клітинок і мають однакову кількість білих і зелених клітинок? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 13.



2. Коли Поспішайко хоче записати якусь дату, він пише число і номер місяця (саме в такому порядку) арабськими цифрами, не залишаючи між ними пропусків, не розміщуючи жодного розділового знака і не ставлячи нулів на початку числа. Скільки дат в році не можна розрізнити при такій формі запису? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 5 пар.

Розв'язання. Так як число і номер місяця не більш ніж двозначні, то плутанина може виникнути тільки в тому випадку, якщо у Поспішайка вийшло трицифрове число без нуля, останні цифри якого 11 або 12, а перша цифра не більше 3. Оскільки у лютому 31-го числа не буває, то не можна однозначно відновити дати, записані в формі 111, 112, 211, 212 та 311.

3. Уздовж дороги довжиною 60 км стоять кілька пеньків (більше одного). Перший турист йде по дорозі зі швидкістю 5 км/год і біля кожного пенька відпочиває одне і те ж ціле число годин. Другий турист їде на велосипеді зі швидкістю 12 км/год і біля кожного пенька відпочиває у два рази довше за першого туриста. Почали й закінчили рух туристи одночасно. Скільки пеньків уздовж дороги? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 7 пеньків.

Розв'язання. Перший турист перебував у русі 12 годин, а другий — 5 годин. Отже, другий турист відпочивав на 7 годин більше. Відтак, перший турист відпочивав рівно 7 годин. Так як 7 — просте число, то пеньків може бути тільки 7.

4. Дядечко Скрудж зайшов до магазину спортивних товарів за подарунками для племінників. Протягнувши продавцеві 20 тугриків, він попросив продати йому один футбольний м'яч, три баскетбольних і коробку тенісних. Чи має він отримати решту, якщо грошей на покупку напевно вистачить, і один тенісний м'яч коштує 33 щиглики, а один футбольний — стільки, скільки коштують три баскетбольних та п'ять тенісних м'ячів разом? (Зауважимо, що 1 тугрик = 100 щигликів.) Відповідь обґрунтуйте.

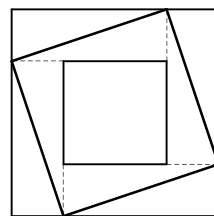
Відповідь: так.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що вартість усієї покупки в щигликах повинна ділитися на 3. Але 2000 на 3 не ділиться, отже, дядечко Скрудж має отримати решту.

5. Площа найбільшого квадрата дорівнює 16 квадратних одиниць; площа найменшого квадрата — 4 квадратні одиниці. Яка площа похилого квадрата, який розміщений між великим та малим квадратами? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 10 квадратних одиниць.

Розв'язання. Площа найбільшого квадрата складається з площі найменшого квадрата та площі чотирьох прямокутників. Отже, площа одного прямокутника дорівнює $(16 - 4) : 4 = 3$ квадратних одиниць. Площа похилого квадрата складається з площі найменшого квадрата та площі чотирьох трикутників, площа кожного з яких дорівнює половині площі прямокутника. Тобто шукана площа дорівнює $4 + 3 \cdot 2 = 10$ квадратних одиниць.





1. Киця важить як 5 хом'ячків та ще половина киці. Собака важить як п'ять киць та ще половина собаки. У скільки разів собака важча за хом'ячка? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: у 100 разів.

Розв'язання. З умови зрозуміло, що киця важить як 10 хом'ячків, а собака — як 10 киць. Звідси отримуємо, що собака важить як 100 хом'ячків, тобто у 100 разів важча.

2. За столом сиділи 5 хлопчиків і 6 дівчаток, а на столі на тарілці лежало кілька булочок. Кожна дівчинка дала по булочці з тарілки кожному знайомому хлопчику. Потім кожен хлопчик дав по булочці з тарілки кожній незнайомій йому дівчинці. Після цього тарілка спорожня. Скільки було булочок? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 30.

Розв'язання. Кожен хлопчик або отримав булочку, або віддав булочку кожній дівчинці. Таким чином, булочок було $5 \cdot 6 = 30$.

3. У новорічну ніч трьом товстунам подарували 2012 кг шоколаду. З того моменту щоранку перший товстун з'їдає шосту частину наявного шоколаду, вдень другий товстун з'їдає п'яту частину залишку, а ввечері третій товстун з'їдає чверть нового залишку. Якого числа якого місяця шоколаду вперше залишиться менше кілограма? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 11 січня.

Розв'язання. Покажемо, що протягом дня товстуни з'їдають рівно половину наявного шоколаду.

Дійсно, якщо зранку було x кг шоколаду, то після сніданку першого товстуну залишиться $x - \frac{1}{6}x = \frac{5}{6}x$ кг; після обіду другого товстуну — $\frac{5}{6}x - \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6}x = \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}x = \frac{4}{6}x = \frac{2}{3}x$ кг; після вечері третього товстуну — $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}x$ кг. Отже, кожен день кількість шоколаду зменшується вдвічі, і на 10-й день залишиться $2012 : 2^{10} = 1,964844$ кг, а на наступний день, 11 січня, шоколаду залишиться менше 1 кг.

4. Грані грального кубика занумеровані числами від 1 до 6. Петрик склав з восьми гральних кубиків удвічі більший куб так, що числа на гранях, що прилягають одна до одної, однакові. Чи може сума всіх 24 чисел, написаних на поверхні складеного Петриком куба, дорівнювати 87? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: не може.

Розв'язання. Помітимо, що сума всіх чисел на гранях кубика дорівнює $8 \cdot (1 + 2 + \dots + 6) = 168$, тобто є парним числом. Сума 24 чисел на внутрішніх гранях кубиків є парним числом, оскільки числа на гранях, що прилягають одна до одної, є однаковими. Тому сума 24 чисел на поверхні великого куба є також парним числом, отже не може дорівнювати 87.

5. Неточні терези показують вагу, яка може відрізнятись від справжньої, але не більше, ніж на 0,5 кг (при різних зважуваннях відхилення показань терезів від справжньої ваги можуть бути різними!). Коли на них поклали свої портфелі Андрій та Боря, терези показали 5,5 кг, портфелі Борі та Вані заважили 6 кг, а Вані та Андрія — 7 кг. Коли ж хлопці зважили разом всі три портфелі, терези показали 8 кг. Скільки важить кожен портфель насправді? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: портфель Андрія важить 3 кг, портфель Борі — 2 кг, портфель Вані — 3,5 кг.

Розв'язання. Помітимо, що портфелі Андрія та Борі важать разом не менше 5 кг; аналогічно портфелі Борі та Вані важать разом не менше 5,5 кг, а Вані та Андрія — не менше 6,5 кг. Тому подвоєна вага всіх трьох портфелів не менше $5 + 5,5 + 6,5 = 17$ кг, звідки вага всіх трьох портфелів не менше 8,5 кг. Оскільки ж три портфелі заважили 8 кг, то їх справжня вага якраз 8,5 кг. Тепер можна знайти вагу кожного портфеля. Портфель Андрія важить $8,5 - 5,5 = 3$ кг, портфель Борі — $8,5 - 6,5 = 2$ кг, портфель Вані — $8,5 - 5 = 3,5$ кг.



1. Сума двох чисел більша за їх добуток, але менша від їх різниці. З'ясуйте, додатні чи від'ємні ці числа. Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: одне додатне, інше від'ємне.

Розв'язання. Нехай a і b — числа, що задовольняють умову задачі. Так як $a + b < a - b$, то $b < 0$. Так як $ab < a + b$ і $b < 0$, то $a > 0$, інакше $ab > 0 > a + b$. Отже, $b < 0$ і $a > 0$.

2. У змаганнях з гімнастики 2 команди мали однакову кількість учасників. У результаті загальна сума балів, отриманих усіма учасниками, дорівнює 156. Скільки було учасників змагання, якщо кожен з них отримав тільки оцінки у 8 або 9 балів?

Відповідь: 18.

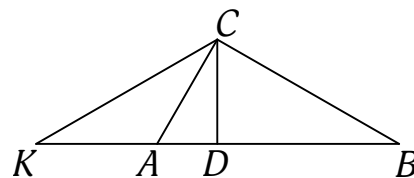
Розв'язання. Так як команди мали однакову кількість учасників, то кількість всіх учасників парна. Максимальна сума балів, яка може бути отримана 16 учасниками, дорівнює $16 \cdot 9 = 144$, що менше від 156, а мінімальна сума балів, яка може бути отримана 20 учасниками, дорівнює $20 \cdot 8 = 160$, що більше за 156. Звідси випливає, що учасників було 18.

3. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) провели висоту CD . Знайдіть кути BAC та ABC , коли відомо, що $BD - AD = AC$.

Відповідь: 60° ; 30° .

Розв'язання. На промені BA відмітимо точку K так, що $AK = AC$. Тоді $KD = AK + AD = BD$. Оскільки CD — висота та медіана трикутника BCK , то цей трикутник рівнобедрений, а отже $\angle CBK = \angle CKB$.

Зауважимо також, що трикутник KAC також рівнобедрений і $\angle AKC = \angle ACK$. Позначимо $\angle ABC = \alpha$. Тоді $\angle BAC = \angle AKC + \angle ACK = 2\alpha$. Таким чином, отримуємо $\alpha + 2\alpha = 90^\circ$. Звідси $\alpha = 30^\circ$, $2\alpha = 60^\circ$.



4. Чи існують такі попарно різні числа a , b і c , що $a(b - c) = b(c - a) = c(a - b)$?

Відповідь: не існують.

Розв'язання. Зауважимо, що $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) = ab - ac + bc - ba + ca - cb = 0$. Таким чином $a(b - c) = 0$, $b(c - a) = 0$, $c(a - b) = 0$. Якщо $b \neq c$, то з рівності $a(b - c) = 0$ випливає, що $a = 0$. Підставляючи $a = 0$ у рівність $b(c - a) = 0$ отримуємо $bc = 0$, звідки або $b = 0$, або $c = 0$.

5. Усі натуральні числа від 1 до 101 у деякому порядку записані в рядок. Чи може отримане багаточисло бути квадратом деякого натурального числа?

Відповідь: ні.

Розв'язання. Підрахуємо суму цифр отриманого числа. Сума цифр кожної з 49 пар чисел 1 і 98, 2 і 97, 3 і 96, і т. д. до 49 і 50 дорівнює 18. Крім цього, сума цифр трьох чисел, що залишилися — 99, 100, 101 — дорівнює 21. Отже, сума цифр отриманого числа дорівнює $18 \cdot 49 + 21 = 903$. Звідси випливає, що отримане число ділиться на 3 і не ділиться на 9, тому воно не є квадратом натурального числа.

6. Чи можна, користуючись тільки операціями додавання, віднімання та множення, скласти з виразів $3x^2 + x$ та $3x$ вираз, що тотожно дорівнює x ?

Відповідь: ні, неможна.

Розв'язання. При $x = \frac{2}{3}$ будь-який вираз, який можна отримати, використовуючи вирази $3x^2 + x$ і $3x$, є цілим числом. А значення виразу x при $x = \frac{2}{3}$ є дробовим числом. Отже, користуючись наведеними операціями скласти з виразів $3x^2 + x$ та $3x$ вираз, що тотожно дорівнює x , неможливо.