



**XIX Відкрита математична олімпіада ліцею «Лідер»**  
**4 клас. Відповіді та вказівки**

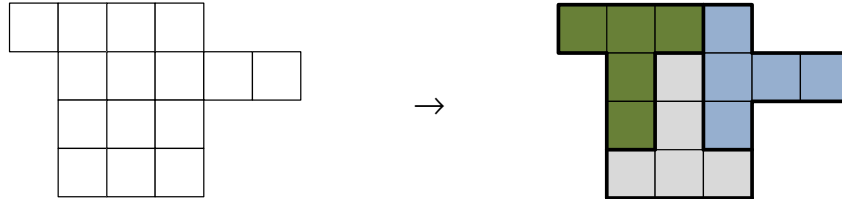
1. Сергійко любить обчислювати суму цифр на табло електронного годинника. Наприклад, якщо годинник показує 21:17, то Сергійко отримує число 11. Яку найбільшу суму він може отримати? Відповідь обґрунтуйте.

**Відповідь:** 24.

**Розв'язання.** Сума цифр буде найбільшою, якщо годинник показує 19:59.

2. Розріжте фігуру, зображену на рисунку, на три рівні за формою частини.

**Розв'язання.** Варіант розрізання наведено на рисунку.



3. У шкільному буфеті вишикувалась черга за пиріжками. Пиріжки ще не винесли, і між кожними двома учнями в черзі втиснулось по одному учню. Пиріжків все ще не було, і між кожними двома учнями в черзі знову втиснулось по одному учню. Нарешті винесли 65 пиріжків і кожному учню якраз дісталось по одному. Скільки учнів стояло в черзі спочатку? Відповідь обґрунтуйте.

**Відповідь:** 17 учнів.

**Розв'язання.** Кожного разу в чергу втискується на одну людину менше, ніж у ній вже стоїть. Тоді перед другим втискуванням у черзі стояло 33 учні (а втиснулося 32), а з самого початку в черзі було 17 учнів (а втиснулося 16).

4. Дмитрик за п'ять днів спіймав 512 мух. Кожного дня він ловив стільки мух, скільки в усі попередні дні разом. Скільки мух спіймав Дмитрик у кожен з цих днів? Відповідь обґрунтуйте.

**Відповідь:** у 1-й та 2-й дні — по 32 мухи; у 3-й день — 64 мухи; у 4-й день — 128 мух; у 5-й день — 256 мух.

**Розв'язання.** Оскільки на 5-й день Дмитрик спіймав стільки ж мух, скільки в усі попередні дні, то на 5-й день він зловив рівно половину всіх мух, тобто  $512 : 2 = 256$  мух. Міркуючи аналогічно, на 4-й день Дмитрик зловив  $256 : 2 = 128$  мух, на 3-й —  $128 : 2 = 64$  мухи, а у 1-й та 2-й дні — по  $64 : 2 = 32$  мухи.

5. Для нумерації квартир у новому будинку на дверях цих квартир закріплюють цифри. Наприклад, для квартири 242 на її дверях необхідно закріпити три цифри — 2, 4 і 2. На скільки цифр більше потрібно використати для нумерації квартир у другому під'їзді, ніж у першому, якщо в кожному з них по 70 квартир? Відповідь обґрунтуйте.

**Відповідь:** 50 цифр.

**Розв'язання.** Порахуємо кількість цифр, необхідних для нумерації квартир у першому під'їзді. З 70 номерів квартир 9 є одноцифровими, а решта 61 — двоцифровими. Отже, знадобиться  $9 + 61 \cdot 2 = 131$  цифр. В номерах квартир другого під'їзду задіяні 29 двоцифрових чисел (від 71 до 99) і 41 трицифрове (від 100 до 140). Таким чином, для нумерації знадобиться  $2 \cdot 29 + 3 \cdot 41 = 181$  цифр. Тому шукана різниця становить  $181 - 131 = 50$ .



1. У деякому місці живуть лицарі та брехуни. Лицарі завжди говорять правду, а брехуни завжди брешуть. Зібралися разом два лицарі та два брехуни. Хто з них міг сказати таке твердження: а) «серед нас усі лицарі»; б) «серед вас рівно один лицар»; в) «серед вас рівно два лицарі»? Відповідь обґрунтуйте.

**Відповідь:** а) брехун; б) лицар; в) жоден.

2. Чи можна замінити букви цифрами у ребусі  $VI \times CIM + 1 = LI \times TOM$  так, щоб вийшла вірна рівність (різні літери потрібно замінити різними цифрами, однакові літери — однаковими цифрами)? Відповідь обґрунтуйте.

**Відповідь:** ні.

**Розв'язання.** І число  $VI \times CIM$ , і число  $LI \times TOM$  закінчуються на одну і ту ж цифру — останню цифру числа  $I \times M$ . Тому ліва і права частини рівності закінчуються різними цифрами, а отже не можуть бути рівними.

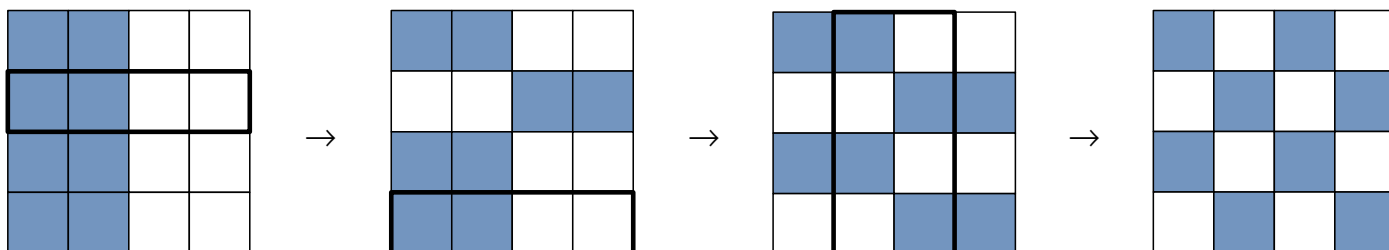
3. Боря і Мишко ідуть у різних вагонах потягу. Кожен з хлопців рахує стовпи за вікном: «один, два, ...». Боря не вимовляє букву «Р», тому при лічбі він пропускає числа, у назві яких є буква «Р», а називає відразу наступне число без цієї літери. Мишко не вимовляє букву «Ш», тому пропускає числа з буквою «Ш». У Борі останній стовп отримав номер 100. Який номер цей стовп отримав у Мишка?

**Відповідь:** 81.

**Розв'язання.** Боря вимовляє числа, у запису яких немає цифр 3 і 4. Серед перших ста чисел таких  $(10-2)^2 = 64$  (і для цифри десятків, і для цифри одиниць є по 8 варіантів), тобто насправді стовпів було 64. Мишко ж пропускає числа, у запису яких присутня цифра 6. Тому, дорахувавши до 59, він пропустить 6 чисел, тобто йому залишиться порахувати ще  $64 - (59 - 6) = 11$  стовпів. Відраховуючи ці 11 стовпів, Мишко пропустить всі числа від 60 до 69, а також число 76. В результаті останній стовп отримає у нього номер  $69 + 11 + 1 = 81$ .

4. У квадраті  $4 \times 4$  клітинки ліва половина пофарбована у синій колір, а решта — у білий. За одну операцію дозволяється перефарбувати у протилежний колір усі клітинки всередині будь-якого прямокутника. Як за три операції з вказаної розфарбовки отримати шахову?

**Розв'язання.**



5. Світланка і Людмила живуть в одному під'їзді. Світланка живе на 6 поверсі. Виходячи від Світланки, Людмила пішла не вниз, як їй було потрібно, а вгору. Дійшовши до останнього поверху, Людмила зрозуміла свою помилку і пішла вниз на свій поверх. Виявилось, що Людмила пройшла шлях в півтора рази більший, ніж той, який би вона пройшла відразу пішовши вниз. Скільки поверхів у будинку? Відповідь обґрунтуйте.

**Відповідь:** 7.

**Розв'язання.** Нехай з шостого поверху Людмилі потрібно було спуститися на  $n$  поверхів. Тоді Людмила пройшла «зайвий шлях» вгору до останнього поверху і назад до шостого. Довжина зайвого шляху  $1,5n - n = 0,5n$  поверхів. Половину цього зайвого шляху Людмила йшла вгору, а половину — вниз. Тобто, в гору вона піднялася на  $n/4$  поверхів. Якщо вона піднялася на один поверх ( $n/4 = 1$ ), то Людмила живе на чотири поверхи нижче Світланки і в будинку 7 поверхів. Якщо ж  $n/4$  дорівнює 2 або більше, то Людмилі довелося б спускатися з шостого поверху мінімум на вісім поверхів униз, що неможливо.



1. Вінні-Пух вийшов від П'ятачка і відправився додому. Коли він пройшов 160 кроків, його кинувся наздоганяти П'ятачок. Швидкість П'ятачка у 5 разів більша за швидкість Вінні-Пуха. На якій відстані від будинку П'ятачок наздожене друга?

**Відповідь:** 200 кроків.

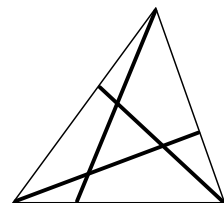
**Розв'язання.** Коли П'ятачок наздожене Вінні-Пуха, то він пройде відстань у п'ять разів більшу, ніж пройшов Вінні-Пух після того, як пройшов 160 кроків. Тобто коли Вінні-Пух проходить відстань  $a$ , то П'ятачок —  $5a$ . Таким чином, 160 кроків дорівнює відстані  $4a$ , звідки  $a = 40$  кроків. Значить П'ятачок наздожене Вінні-Пуха на відстані  $40 \cdot 5 = 200$  кроків.

2. Оля написала 26 послідовних натуральних чисел і вибрала десять із них. Сума вибраних чисел виявилась простим числом. Чи може бути так, що сума решти 16 чисел — теж просте число?

**Відповідь:** ні, не може.

**Розв'язання.** Серед 26 послідовних натуральних чисел є 13 парних чисел і 13 непарних, тому їх сума — число непарне. Сума десяти Оліних чисел — число просте, і значить, непарне (оскільки єдине парне просте число — 2, а його не можна записати у вигляді суми десяти натуральних чисел). Тоді сума решти 16 чисел — парне число, яке теж більше двох і не просте.

3. Великий трикутник розрізали трьома **жирними** відрізками на 4 трикутники і 3 чотирикутники. Сума периметрів чотирикутників дорівнює 25 см, а сума периметрів чотирьох трикутників дорівнює 20 см. Периметр даного великого трикутника дорівнює 19 см. Знайдіть суму довжин **жирних** відрізків.



**Відповідь:** 13 см.

**Розв'язання.** Сума периметрів усіх маленьких трикутників і чотирикутників складається з периметра даного трикутника і подвоєної суми довжин **жирних** відрізків. Нехай сума довжин **жирних** відрізків дорівнює  $a$ , тоді  $25 + 20 = 2a + 19$ ,  $a = 13$ .

4. Андрійко вирізав із паперу десять карток і на кожній написав по одній цифрі 0, 1, 2, 3, ..., 9. Потім він розклав їх на столі по дві і помітив, що отримані двоцифрові числа відносяться як 1:2:3:4:5. Покажіть, як Андрійко розкладав картки. Знайдіть усі варіанти.

**Відповідь:** 18, 36, 54, 72, 90.

**Розв'язання.** Андрійко розклав картки так: 18, 36, 54, 72, 90. Цей єдиний розклад можна знайти виконуючи повний перебір із десяти варіантів: перше число змінюється від 10 до 19, а останнє, відповідно, від 50 до 95. Варіанти, в яких цифри повторюються, нас не влаштовують (наприклад, 10, ..., 50).

5. У кожну клітину таблиці розміром  $3 \times 3$  вписують деяке число. Таблицю, в якій всі записані числа різні, а сума чисел у всіх рядках і стовпцях однакова, називають магічним квадратом. Так, наприклад, таблиця, зображена на рисунку, — магічний квадрат. Чи існує магічний квадрат, заповнений числами, оберненими до натуральних?

8	1	6
3	5	7
4	9	2

**Відповідь:** так, існує.

**Розв'язання.** Нехай є магічний квадрат, у якому записані дев'ять натуральних чисел. Знайдемо найменше спільне кратне цих чисел і розділимо кожне число таблиці на нього. Отримали таблицю, в якій записані числа, обернені до натуральних. Відповідні суми в ній будуть рівні, тому що ми кожну з них розділили на одне і те саме число. Отже, отримана таблиця — магічний квадрат.



**XIX Відкрита математична олімпіада ліцею «Лідер»**  
**7 клас. Відповіді та вказівки**

1. Відомо, що числа  $x$  і  $y$  такі, що  $2x - 3y = 2y^2$  і  $x - 2y = 10$ . Знайдіть значення виразу  $x^2 - 4xy + 4x - 6y$ .

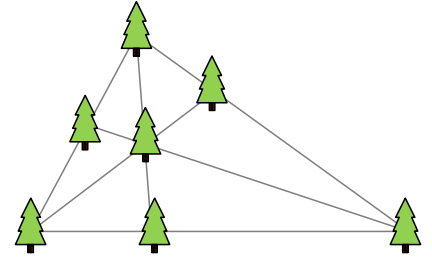
**Відповідь:** 100.

**Розв'язання.** Подамо даний вираз у вигляді  $x^2 - 4xy + 2(2x - 3y)$ . Враховуючи, що  $2x - 3y = 2y^2$ , отримуємо:  $x^2 - 4xy + 4x - 6y = x^2 - 4xy + 4y^2 = (x - 2y)^2 = 100$ .

2. Чи можна посадити сім дерев у шість рядів так, щоб в кожному ряду росло рівно три дерева?

**Відповідь:** можна.

**Розв'язання.** На рисунку показано один з можливих розв'язків.



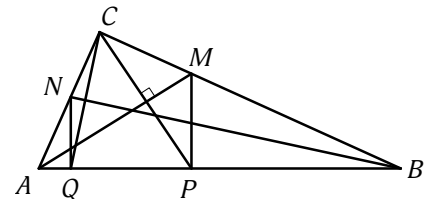
3. У запису натурального числа переставили цифри і отримали число, яке у три рази більше вихідного. Доведіть, що отримане число ділиться націло на 27.

**Розв'язання.** Нехай  $n$  — вихідне число, а  $m$  — число, яке було отримано. Тоді за умовою  $m = 3n$ . Звідси випливає, що  $m$  кратне 3. Оскільки  $m$  і  $n$  записані одними й тими цифрами, то число  $n$  також кратне 3. Нехай  $n = 3k$ . Тоді  $m = 3n = 9k$ . Звідси випливає, що число  $m$  кратне 9. Але тоді і число  $n$  кратне 9. Позначимо  $n = 9l$ . Тоді  $m = 3n = 27l$ .

4. У прямокутному трикутнику  $ABC$  проведені бісектриси гострих кутів  $AM$  і  $BN$ . З точок  $M$  і  $N$  на гіпотенузу  $AB$  опущено перпендикуляри  $MP$  і  $NQ$ . Знайдіть градусну міру кута  $PCQ$ .

**Відповідь:**  $45^\circ$ .

**Розв'язання.** Нехай  $\angle CAB = \alpha$ ,  $\angle CBA = \beta$ . У прямокутних трикутниках  $AMP$  і  $AMC$  спільна гіпотенуза  $AM$  і рівні гострі кути  $\angle MAP$  і  $\angle MAC$ . Тоді  $\triangle AMP = \triangle AMC$ . Звідси  $\angle PMA = \angle CMA$  і  $MP = MC$ . Отже, трикутник  $PMC$  — рівнобедрений. Тоді  $\angle MPC = \angle MCP$ . Крім того,  $MA \perp PC$ . Оскільки  $\angle MAP + \angle AMP = 90^\circ$  і  $\angle MCP + \angle AMP = 90^\circ$ , то  $\angle MCP = \angle MAP = \frac{\alpha}{2}$ . Аналогічно,  $\angle NCQ = \frac{\beta}{2}$ .



Тоді  $\angle PCQ = 90^\circ - \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 45^\circ$ .

5. Було надруковано 10 000 лотерейних квитків з номерами від 0000 до 9999. Квиток з номером  $\overline{abcd}$  вважають виграшним, якщо цифри  $a$ ,  $b$ ,  $c$  і  $d$  такі, що  $a + c = b + d$ . Доведіть, що сума номерів усіх виграшних квитків кратна числу 101.

**Розв'язання.** Якщо квиток з номером  $\overline{abcd}$  — виграшний, то квиток  $\overline{cdab}$  також є виграшним. Але  $\overline{abcd} + \overline{cdab} = 1000a + 100b + 10c + d + 1000c + 100d + 10a + b = 101(10a + b + 10c + d)$ . Якщо квитки  $\overline{abcd}$  і  $\overline{cdab}$  співпадають, тобто  $a = c$  і  $b = d$ , то квиток  $\overline{abcd}$  не має пари. Але  $\overline{abab} = 1000a + 100b + 10a + b = 101(10a + b)$ .