



XVIII Відкрита математична олімпіада ліцею «Лідер»
4 клас. Відповіді та вказівки

1. Скільки кубиків треба додати до фігури, зображеної на рисунку 1, щоб вийшла фігура, зображена на рисунку 2? Відповідь поясніть.

Відповідь: 4.

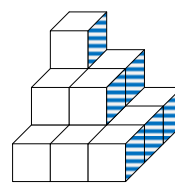


рис. 1

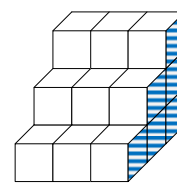
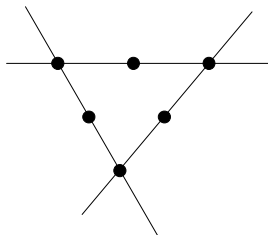


рис. 2

2. Незнайко накреслив три прямих лінії і позначив на них 6 точок. Виявилось, що на кожній прямій він позначив три точки. Покажіть, як він це зробив.

Розв'язання. Наприклад, так:



3. Розріжте фігуру, зображену на рисунку 3, на п'ять частин однакової форми і однакового розміру так, щоб до кожної частини попав рівно один смугастий квадратик.

Розв'язання. Варіант розрізання наведено на рис. 4.

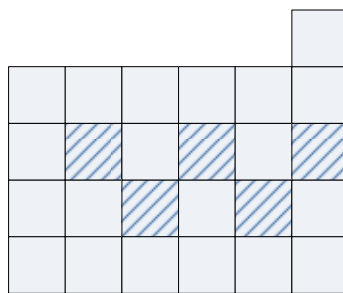


рис. 3

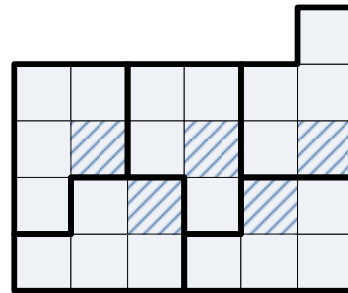


рис. 4

4. Позавчора школярі зібрали макулатури на 3 кг більше, ніж вчора, а вчора — на 40 кг менше, ніж позавчора і сьогодні разом.

Скільки кілограмів макулатури зібрали школярі сьогодні? Відповідь поясніть.

Відповідь: 37 кг.

Розв'язання. Так як вчора школярі зібрали на 3 кг менше, ніж позавчора, і на 40 кг менше, ніж позавчора і сьогодні разом, то за сьогодні школярі зібрали 37 кг макулатури.

5. У школі 18 учителів. Кожен з них або добрий, або злий. Відомо, що серед будь-яких трьох учителів принаймні один добрий. Яка найбільша можлива кількість злих учителів? Відповідь поясніть.

Відповідь: 2.

Розв'язання. Якщо у школі 3 злих учителя, то буде існувати трійка вчителів, в якій немає жодного доброго.

6. Дід удвічі сильніший за Бабу, Баба втричі сильніша за Онучку, Онучка вчетверо сильніша за Жучку, Жучка вп'ятеро сильніша за Кішку, Кішка вшестеро сильніша за Мишку. Без Мишки всі інші Ріпку витягти не можуть, а з нею — можуть. Скільки потрібно Мишок, щоб вони самі витягли Ріпку? Відповідь поясніть.

Відповідь: 1237.

Розв'язання. Будемо рахувати силу кожного в Мишках. Кішка — це 6 Мишок, Жучка — 5 Кішок, тобто 30 Мишок, Онучка — 4 Жучки, тобто 120 Мишок, Баба — три Онучки, тобто 360 Мишок, Дід — 2 Баби, тобто 720 Мишок. Тягнуть Ріпку $720 + 360 + 120 + 30 + 60 + 1 = 1237$ Мишок.



1. Знайдіть найменше натуральне число, яке закінчується на 12, ділиться на 12 і має суму цифр, що дорівнює 12. Відповідь поясніть.

Відповідь: 912.

Розв'язання. Число 12 не підходить. Отже, шукане число складається принаймні з трьох цифр і має такий вигляд: $*12$. До потрібної суми цифр не вистачає 9. Перевіряємо: 912 ділиться на 12.

2. Шнур завдовжки 64 м згинають навпіл і розрізають у місці згину, потім отримані шматки знову згинають навпіл і *одночасно* розрізають. Так роблять доти, доки не отримають шматки шнура довжиною 2 м. Скільки разів потрібно розрізати шнур? Відповідь поясніть.


Відповідь: 5 разів.

Розв'язання. Одна операція розрізання дозволяє подвоїти кількість шматочків. Спочатку у нас один шматок, а отримати потрібно 32. Отже, операцію доведеться виконати 5 разів. Перевіримо: $1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 32$.

3. На острові проживають 2010 мешканців, кожен з яких або лицар (завжди говорить правду), або брехун (завжди бреше). Одного разу всі жителі острова розбилися на пари, і кожен про свого напарника сказав одну із фраз: «він лицар» або «він брехун». Чи могло виявитися так, що тих і інших фраз було вимовлено порівну? Відповідь поясніть.

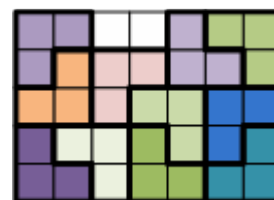
Відповідь: ні.

Розв'язання. Зауважимо, що коли в парі стоять обидва лицарі або обидва брехуни, то вони один про одного скажуть: «він лицар». Якщо у парі стоять лицар і брехун, то вони обидва скажуть: «він брехун». Таким чином, кожна фраза виголошена парну кількість разів. Якщо б цих фраз було порівну, то кожна фраза пролунала б по 1005 разів. А це число непарне.

4. Яку найбільшу кількість куточків вигляду , що складаються з трьох квадратів 1×1 , можна помістити в прямокутник 5×7 ? (Куточки можна повертати і перевертати, але не можна накладати один на одний.) Відповідь поясніть.

Відповідь: 11.

Розв'язання. Площа куточка дорівнює 3, а площа прямокутника — 35, тому у прямокутнику не може поміститися 12 куточків. На рисунку наведено один зі способів розміщення у прямокутнику 11 куточків.



5. У Аліси живе крокозябра. Кожного дня вона з'їдає бананів рівно вдвічі більше за свою вагу, а кожної ночі худне втричі. Ідучи на чотириденні канікули, Аліса залишила їй 40 кг бананів, і цього крокозябрі вистачило точно. Скільки важила крокозябра до від'їзду Аліси?

Відповідь: 5 кг.

Розв'язання. Зауважимо, що коли вранці крокозябра важить m кг, то, з'ївши $2m$ кг бананів, вона до вечора важить $3m$ кг, а вранці наступного дня — m кг, і так далі. Таким чином, за 4 дні крокозябра з'їсть $8m$ кг бананів, що за умовою складає 40 кг. Отже, її вага до від'їзду Аліси — 5 кг.



1. Знайдіть найменше натуральне число, яке закінчується на 16, ділиться націло на 16 і має суму цифр, що дорівнює 16. Відповідь поясніть.

Відповідь: 3616.

Розв'язання. Число 16 не підходить. Число 916 — єдине трицифрове число, яке закінчується на 16 і має суму цифр, що дорівнює 16. Однак число 916 на 16 не ділиться націло. Серед чотирицифрових чисел підходящі слід шукати серед тих, у яких сума перших двох цифр дорівнює 9. Так як ми шукаємо найменше з чисел, кратних 16, то зрозуміло, що першу цифру слід обирати якомога меншою. Легко переконатися, що числа 1816 та 2716 на 16 не діляться, $3616 : 16 = 226$.

2. На острові проживають 2010 мешканців, кожен з яких або лицар (завжди говорить правду), або брехун (завжди бреше). Одного разу всі жителі острова розбилися на пари, і кожен про свого напарника сказав одну із фраз: «він лицар» або «він брехун». Чи могло виявитися так, що тих і інших фраз було вимовлено порівну? Відповідь поясніть.

Див. задачу 3 (5 клас).

3. Рома на кожній перерві з'їдав більше цукерок, ніж на попередній, і за всі 5 перерв з'їв 31 цукерку. Скільки цукерок він міг з'їсти на четвертій перерві, якщо на першій він з'їв у 3 рази менше, ніж на п'ятій? Відповідь поясніть.

Відповідь: 8 цукерок.

Розв'язання. Якщо Рома на першій перерві з'їв не більше двох цукерок, значить, на п'ятій перерві він з'їв не більше шести цукерок і всього не більше $5 \cdot 6 = 30$ цукерок — протиріччя. Якщо на першій перерві він з'їв не менше чотирьох цукерок, то на другій — не менше п'яти, на третій — шести, на четвертій — семи, а на п'ятій — не менше 12. Але тоді всього він з'їв не менше $4 + 5 + 6 + 7 + 12 = 34$ цукерок — протиріччя.

Звідси випливає, що на першій перерві Рома міг з'їсти тільки 3 цукерки. Тоді на п'ятій перерві він з'їв 9 цукерок. Припустимо, що на четвертій перерві він з'їв не більше семи цукерок, тоді на третій він з'їв не більше шести, на другій — не більше п'яти цукерок. І всього виходить не більше $3 + 5 + 6 + 7 + 9 = 30$ цукерок.

Таким чином, на четвертій перерві він міг з'їсти тільки 8 цукерок. Приклад: 3, 5, 6, 8, 9 цукерок — задовольняє умові.

4. Кожен з членів журі запропонував для олімпіади однакову кількість задач. Усі запропоновані задачі виявилися різними. З них склали загальний список, з якого кожен член журі викреслив по 4 задачі (жодну з задач не викреслювали двічі). У результаті в списку залишилося 5 задач. Скільки всього було членів журі? Відповідь поясніть.

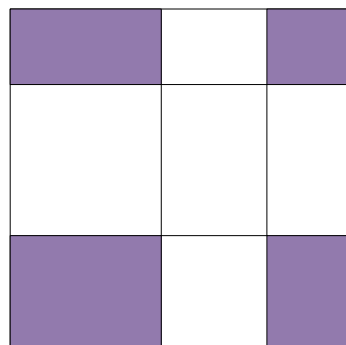
Відповідь: 5.

Розв'язання. Нехай n — кількість членів журі. Тоді всього задач $4n + 5$. Це число ділиться на n , оскільки кожен член журі запропонував однакову кількість задач. Але тоді і 5 ділиться на n , тобто n дорівнює 1 або 5. Так як у журі напевно більше однієї людини, то $n = 5$.

5. Квадрат 100×100 розбитий двома горизонтальними і двома вертикальними лініями (не обов'язково по клітинках) на 9 прямокутників. Сторони центрального прямокутника дорівнюють 45 і 30. Знайдіть суму площ прямокутників, виділених на рисунку кольором. Відповідь поясніть.

Відповідь: 3850.

Розв'язання. «Зімкнемо» кольорові прямокутники. Вийде прямокутник зі сторонами $100 - 45 = 55$ і $100 - 30 = 70$. Його площа дорівнює $55 \times 70 = 3850$.





XVIII Відкрита математична олімпіада ліцею «Лідер»
7 клас. Відповіді та вказівки

1. Знайдіть найменше натуральне число, яке закінчується на 16, ділиться націло на 16 і має суму цифр, що дорівнює 16. Відповідь поясніть.

Див. задачу 1 (6 клас).

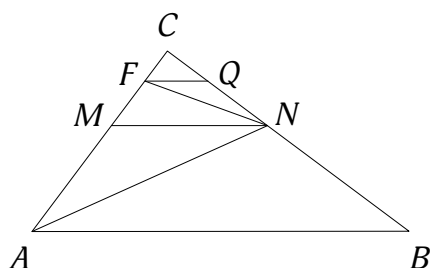
2. Додатні числа a і b такі, що $a^2 + b = b^2 + a$. Чи вірно, що $a = b$? Відповідь поясніть.

Відповідь: ні, не вірно.

Розв'язання. Для того щоб знайти a і b , для яких справджується ця рівність, перетворимо її так:
 $a^2 - b^2 = a - b$, $(a - b)(a + b) = (a - b)$, $(a - b)(a + b - 1) = 0$. Отже, дана рівність справджується, якщо $a = b$ або $a + b = 1$. Таким чином, достатньо вказати пару різних додатних a і b , для яких $a + b = 1$. Наприклад, $a = 0,2$; $b = 0,8$.

3. На катеті AC прямокутного трикутника ABC відмітили точки M і F (точка M належить відрізку AF), а на катеті BC — точки N і Q так, що $MN \parallel AB$, $FQ \parallel AB$, $MN = AM$, $FQ = QN$. Знайдіть величину кута ANF . Відповідь поясніть.

Відповідь: 45° .



Розв'язання. Оскільки $AM = MN$, то трикутник AMN рівнобедрений і $\angle MAN = \angle MNA$. Окрім того, $MN \parallel AB$, а отже $\angle MNA = \angle NAB$. Отримали, що $\angle MAN = \angle NAB$, а значить AN — бісектриса кута BAC . Тоді $\angle MNA = \frac{1}{2} \angle BAC$. Аналогічно можна показати, що NF — бісектриса кута MNC і $\angle MNF = \frac{1}{2} \angle MNC$.

Проте $\angle MNC = \angle ABC$, а значить $\angle MNF = \frac{1}{2} \angle ABC$. Маємо:

$$\angle ANF = \angle ANM + \angle MNF = \frac{1}{2} \angle BAC + \frac{1}{2} \angle ABC = 45^\circ.$$

4. Кожен з членів журі запропонував для олімпіади однакову кількість задач. Усі запропоновані задачі виявилися різними. З них склали загальний список, з якого кожен член журі викреслював по 4 задачі (жодну з задач не викреслювали двічі). У результаті в списку залишилося 5 задач. Скільки всього було членів журі? Відповідь поясніть.

Див. задачу 4 (6 клас).

5. Натуральне число n називають гарним, якщо число $n^2 + 1$ ділиться націло на 2011. Доведіть, що серед чисел 1, 2, 3, ..., 2010 парна кількість гарних чисел. Відповідь поясніть.

Розв'язання. Розглянемо пари чисел: (1; 2010), (2; 2009), (3; 2008), ..., (1005; 1006). Доведемо, що числа k і $2011 - k$ або обидва гарні, або обидва не гарні. Дійсно, якщо число $k^2 + 1$ ділиться націло на 2011, то і число $a = (2011 - k)^2 + 1 = (2011^2 - 2 \cdot 2011k) + (k^2 + 1)$ також ділиться на 2011 націло. Якщо ж число $k^2 + 1$ не ділиться націло на 2011, то і число a має таку ж властивість.

6. Дано числа 1, 2, 4, 6. Дозволяється вибрати будь-які два з цих чисел і помножити їх на одне і те саме натуральне число. Чи можна за декілька таких операцій зробити всі числа рівними? Відповідь поясніть.

Відповідь: ні.

Розв'язання. Розглянемо добуток даних чисел. Спочатку він дорівнює 48. Зауважимо, що число 48 не є квадратом натурального числа. Якщо деякі два з даних чисел помножити на натуральне число n , добуток цих чисел зміниться у n^2 разів. Отже, якщо початковий добуток не був квадратом натурального числа, то він їм і не стане. Але якщо всі дані числа стануть рівними між собою, то їх добуток буде квадратом. Отже, такими операціями неможливо отримати чотири рівних числа.