

Дорогие школьники!

Вам предлагаются задачи проблемного тура. Будут оцениваться не только решения одной или нескольких задач, но и возможные обобщения, а также интересные идеи, возникшие при решении. На фестивале будут прочитаны лекции, которые расскажут Вам о решении этих задач и их связи с современной математикой.

Любі учні!

Вам пропонуються задачі проблемного туру. Будуть оцінені не тільки розв'язки однієї чи кількох задач, але й можливі узагальнення, а також цікаві ідеї, які виникли при розв'язанні. На фестивалі будуть прочитані лекції, які розкажуть Вам про розв'язання цих задач та їх зв'язок із сучасною математикою.

Dear pupils!

We propose you tasks of the problem round. Not only solutions, but possible generalizations and interesting ideas appeared during solving will be evaluated. We will give lectures on each problem and its connection with modern mathematics at the Festival.

Задача 1.

На оси Ox находится несколько частиц. Каждую секунду каждая частица делится на 2 равные части, первая часть располагается на 1 левее соответствующей частицы, а вторая на 1 правее. Если в одну точку попадают две частицы, то их масса складывается. Допустим, что в начальный момент времени на оси находится только одна частица массы 1 в точке m .

- 1) Найти массу, которая будет находиться в точке k после n секунд.
- 2) Как изменится ответ, если в точке 0 находится поглощающий экран, т.е. все частицы попавшие в 0 уничтожаются?
- 3) Как изменится ответ, если в точке 0 находится отражающий экран, т.е. частица попавшая в 0 на следующем шаге не делится, а попадает в точку 1?
- 4) Как изменится ответ, если в точке 0 находится полупрозрачная мембрана: частица попавшая в 0 делится на две в пропорции $r:q$, первая попадает в -1 , а вторая в 1?
- 5) Что происходит, если в точках 0 и d находятся отражающие экраны, или поглощающие экраны, или один поглощающий экран, а другой отражающий?
- 6) Что происходит с массой, если n достаточно большое?

На осі Ox знаходиться декілька частинок. Кожну секунду кожна частинка ділиться на 2 рівні частини, перша розташовується на 1 лівіше відповідної частинки, а друга на 1 правіше. Якщо в одну точку потрапляють дві частинки, то їх маси додаються. Припустимо, що в початковий момент часу на осі знаходиться одна частинка маси 1 в точці m .

- 1) Знайти масу, яка буде знаходитись в точці k після n секунд.
- 2) Як зміниться відповідь, якщо в точці 0 знаходиться поглинаючий екран, тобто всі частинки, що потрапили в 0 знищуються?
- 3) Як зміниться відповідь, якщо в точці 0 знаходиться відбиваючий екран, тобто частинка яка потрапила в 0 на наступному кроці не ділиться, а потрапляє в точку 1?
- 4) Як зміниться відповідь, якщо в точці 0 знаходиться напівпрозора мембрана, тобто: частинка яка потрапила в 0 ділиться в пропорції $r:q$, перша потрапляє в -1 , а друга в 1?
- 5) Що відбувається, якщо в точках 0 і d знаходяться відбиваючі екрани, або поглинаючі екрани, або один екран відбиваючий, а другий поглинаючий?
- 6) Що відбувається з масою, якщо n достатньо велике?

There are several particles on an axis Ox . Each particle is divided on 2 equal parts each second. The first part is located to the left from initial particle and the second part to the right. The distance between each part and initial particle is 1. If two particles come to the same point then their masses are added.

Assume that there is the only one particle of mass 1 in a point m at the initial instant of time.

- 1) Find mass that is located in a point k after n seconds.
- 2) What happens if there is absorbing screen in a point 0, i.e. each particle which gets 0 is deleted.
- 3) What happens if there is reflecting screen in a point 0, i.e. each particle which gets 0 is not divided on the next step and jumps into a point 1.
- 4) What happens if there is elastic screen in a point 0, i.e. each particle which gets 0 is divided in the ratio $p:q$, the first part comes to -1 and the second comes to 1?
- 5) What happens if there are two reflecting screens in points 0 and d , or there are two absorbing screens, or one screen is absorbing and the second is reflecting?
- 6) What happens with mass if n is large enough?

Задача 2.

Доказать, что существует не менее 2^{2007} наборов $\{x_k / k=1, \dots, 2008\}$, состоящих из 1 или (-1) , и таких, что

$$a) \left| \sum_{k=1}^{2008} \frac{x_k}{k} \right| \leq 3;$$

$$b) \max_{1 \leq n \leq 2008} \left| \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k} \right| \leq 3.$$

Довести, що існує не менше ніж 2^{2007} наборів $\{x_k / k=1, \dots, 2008\}$, що складаються з 1 або (-1) , і таких, що

$$a) \left| \sum_{k=1}^{2008} \frac{x_k}{k} \right| \leq 3;$$

$$b) \max_{1 \leq n \leq 2008} \left| \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k} \right| \leq 3.$$

Prove, that there exist at least 2^{2007} sequences $\{x_k / k=1, \dots, 2008\}$, from 1 and -1 such, that

$$a) \left| \sum_{k=1}^{2008} \frac{x_k}{k} \right| \leq 3;$$

$$b) \max_{1 \leq n \leq 2008} \left| \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k} \right| \leq 3.$$

Задача 3.

Иван и Петр по очереди подбрасывают монету. Если подряд выпадает 2 «орла», то выигрывает Иван, если подряд три «решки» - Петр. Как только выпадает одна из этих серий, игра заканчивается.

а) Иван предлагает Петру следующие ставки: если он проигрывает, то платит Петру 3 руб., а если выигрывает, то получает от Петра 2 руб. Следует ли Петру соглашаться на такую игру?

- б) Каково минимальное отношение ставок, при котором игра будет (в среднем) непроигрышной для Петра?
- в) Как изменятся ответы на предыдущие вопросы, если Иван и Петр подбрасывают по очереди две монеты (каждый – свою), ожидая выпадения своей выигрышной серии на своей монете, и Петр подбрасывает первый?

Іван та Петро по черзі підкидають монету. Якщо випадають поспіль два “орли”, то виграє Іван, якщо випадають поспіль три “решітки” – Петро. Як тільки випадає одна з цих серій, гра закінчується.

- а) Іван пропонує Петрові такі ставки: якщо він програє, то платить Петрові 3 грн., а якщо виграє, то отримує від Петра 2 грн. Чи слід Петрові погоджуватись на таку гру?
- б) Яким є мінімальне співвідношення ставок, за якого гра буде (в середньому) непрограшною для Петра?
- в) Як зміняться відповіді на попередні запитання, якщо Іван та Петро підкидають по черзі дві монети (кожен – свою), чекаючи на випадання своєї виграшної серії на своїй монеті, і Петро підкидає першим?

John and Peter, in turn, toss a coin. If two “heads” fall in turn then John wins, if three “tails” fall in turn then Peter wins. As soon one of these series falls, the game is finished.

- a) John proposes Peter such a gamble: if he loses then he pays 3 Euro to Peter, if he wins he gets 2 Euro from Peter. Should Peter accept the gamble?
- b) What is the minimal stake ratio for the gamble to be non-losing (in the average) for Peter?
- c) How the answers to the previous two questions would change if John and Peter toss, in turn, two coins (everyone its own one) and wait till their winning series appear on their own coin? Peter tosses first.