



XXIV Відкрита математична олімпіада лицейом «Лідер»

5 клас

1. Відмінник Аркаша написав на дошці приклад на множення, проте хуліган Мишко витер усі знаки дій (див. рисунок). Допоможіть Аркаші відновити приклад, вставивши між деякими числами знак множення.
 $3\ 2\ 1\ 3\ 2\ 1 = 2016$
2. Щоранку п'ятикласник Сашко з батьком роблять зарядку, бігаючи шкільним стадіоном. Вони починають пробіжку з лінії старту і біжать у різних напрямках по колу стадіону. Закінчують зарядку тоді, коли знову зустрічаються на лінії старту. Скільки триває зарядка Сашка, якщо батько бігає вдвічі швидше, а остання зустріч перед закінченням зарядки була через 10 хв після початку?
3. У кожному із числових наборів: 7, 20, 33, 46, ... та 9, 17, 25, 33, 41, ... зустрічається число 33. Знайдіть наступні два числа, які зустрічаються у кожному із цих наборів.
4. У протилежних кутах таблиці розміром 15×16 сидять кіт Том та мишеня Джеррі. Кожну хвилину Джеррі перебігає на сусідню по стороні клітину, а Том, намагаючись спіймати мишеня, одразу стрибає ходом шахового коня (літерою «Г»: $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$). Чи зможе за деякий час Том спіймати Джеррі (тобто опинитися з Джеррі в одній клітині)?
5. Король математичної країни написав на дошці числа 4, 5, 6 та дозволив довільні два числа a та b , записані на дошці, замінити числами $2a+b$ та $a+2b$. Першому, хто за такими правилами утворить числа 2015, 2016, 2017, король прообіцяв півкоролівства. Чи зможе хтось з його підданих стати казково багатим?

Користуватися мікрокалькуляторами заборонено

Час виконання роботи — 2 години

Київ, лицей «Лідер»
28 лютого 2016 року



XXIV Відкрита математична олімпіада ліцею «Лідер»
5 клас. Відповіді та вказівки

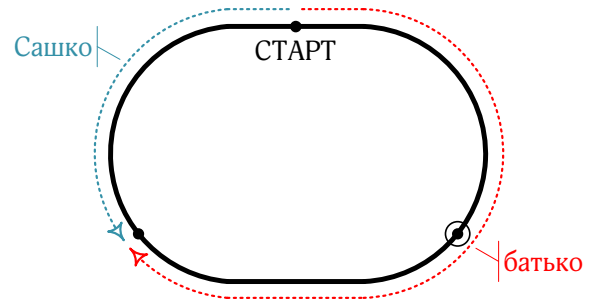
1. Відмінник Аркаша написав на дошці приклад на множення, проте хуліган Мишко витер усі знаки дій (див. рисунок). Допоможіть Аркаші відновити приклад, вставивши між деякими числами знак множення.

Відповідь: $3 \cdot 21 \cdot 32 \cdot 1 = 2016$.

2. Щоранку п'ятикласник Сашко з батьком роблять зарядку, бігаючи шкільним стадіоном. Вони починають пробіжку з лінії старту і біжать у різних напрямках по колу стадіону. Закінчують зарядку тоді, коли знову зустрічаються на лінії старту. Скільки триває зарядка Сашка, якщо батько бігає вдвічі швидше, а остання зустріч перед закінченням зарядки була через 10 хв після початку?

Відповідь: 15 хвилин.

Розв'язання. Оскільки батько бігає вдвічі швидше, то їх перша зустріч відбудеться, коли Сашко пробіжить $1/3$ кола стадіону, а батько — $2/3$ кола; друга зустріч — коли Сашко пробіжить $2/3$ кола, а батько — $4/3$ кола. Третя і остання зустріч відбудеться, коли Сашко пробіжить $3/3 = 1$ коло стадіону, а батько — $6/3 = 2$ кола стадіону. Отже, за час зарядки Сашко пробігає одне коло, причому $2/3$ кола він пробігає за 10 хв. Таким чином, одне коло стадіону п'ятикласник долає за $10 : 2 \cdot 3 = 15$ хв.



3. У кожному із числових наборів: 7, 20, 33, 46, ... та 9, 17, 25, 33, 41, ... зустрічається число 33. Знайдіть наступні два числа, які зустрічаються у кожному із цих наборів.

Відповідь: 137; 241.

Розв'язання. Кожне число першого набору отримане збільшенням попереднього числа на 13, а кожне число другого набору — збільшенням попереднього на 8. Найменше число, що ділиться на 13 та на 8 — це 104, наступне — 208. Тому наступні два числа, спільні в обох наборах: $33 + 104 = 137$ (11-е у першому наборі та 17-е у другому) та $33 + 208 = 241$ (19-е у першому наборі та 30-е у другому).

4. У протилежних кутах таблиці розміром 15×16 сидять кіт Том та мишеня Джеррі. Кожну хвилину Джеррі перебігає на сусідню по стороні клітину, а Том, намагаючись спіймати мишеня, одразу стрибає ходом шахового коня (літерою «Г»: $\begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix}$). Чи зможе за деякий час Том спіймати Джеррі (тобто опинитися з Джеррі в одній клітині)?

Відповідь: Ні.

Розв'язання. Якщо розфарбувати таблицю у шаховому порядку в білий та чорний кольори, то спочатку Том та Джеррі будуть сидіти в клітинах різного кольору. Оскільки Джеррі перебігає на сусідню по стороні клітину, то кожну хвилину він займатиме клітину іншого кольору. Том, стрибаючи літерою «Г», кожну хвилину теж займатиме клітину іншого кольору. Тому в будь-який момент часу кіт та мишеня будуть у клітинах різного кольору, а отже в одній клітині опинитися не зможуть.

5. Король математичної країни написав на дошці числа 4, 5, 6 та дозволив довільні два числа a та b , записані на дошці, замінити числами $2a + b$ та $a + 2b$. Першому, хто за такими правилами утворить числа 2015, 2016, 2017, король пообіцяв півкоролівства. Чи зможе хтось з його підданих стати казково багатим?

Відповідь: Не зможе.

Розв'язання. Числа $2a + b$ та b однакової парності, так само, як і числа $a + 2b$ та a , тобто кількість парних і непарних чисел, що записані на дошці, не може змінитися. Серед чисел 4, 5, 6 одне непарне, а серед чисел 2015, 2016, 2017 вже два, чого бути не може.